**Actividad Evaluativa - Eje 2 - Técnicas de Integración**

Melquir Romero, Julian Piñeros y Harold Sabogal

Universidad Área Andina, Bogotá D.C

Fundación Universitaria del Área Andina

Ingeniería en Sistemas

Cálculo Integral

Danilo De Jesús Ariza Agámez

1 de marzo del 2025

**Actividad Evaluativa - Eje 2 - Técnicas de Integración**

En cálculo integral, dominar las técnicas de integración es como tener una caja de herramientas llena de métodos versátiles para resolver problemas que, a simple vista, parecen complejos. Sin embargo, el desafío principal no está solo en aplicar fórmulas, sino en saber elegir la herramienta adecuada según la estructura de cada integral. ¿Cómo decidir entre integración por partes, sustitución trigonométrica o fracciones parciales? La respuesta no siempre es obvia y requiere un análisis cuidadoso del integrando, así como creatividad para transformar expresiones en formas más manejables.

En este taller, exploraremos paso a paso cómo abordar integrales de distintos tipos: desde funciones polinómicas multiplicadas por logaritmos hasta expresiones trigonométricas elevadas a potencias impares. Veremos que resolver una integral no se limita a cálculos mecánicos, sino que implica tres etapas clave: identificar la técnica apropiada, analizar la estructura del problema y evaluar si las transformaciones realizadas nos acercan a la solución. A través de ejercicios prácticos, aplicaremos cada método, destacando no solo los pasos algebraicos, sino también el razonamiento detrás de cada decisión. Este enfoque busca fortalecer el pensamiento crítico, invitándonos a cuestionar: ¿Esta sustitución simplificará la integral? ¿Hay una forma más eficiente de resolverlo? Al final, no solo tendremos resultados numéricos, sino una comprensión profunda de cómo las piezas del cálculo encajan entre sí.

Objetivo General

Aplicar de manera crítica y estructurada las técnicas de integración (por partes, trigonométrica, sustitución trigonométrica y fracciones parciales) para resolver integrales de funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, demostrando no solo la habilidad operativa, sino también la capacidad de seleccionar el método adecuado según las características del integrando. Además, se busca fomentar la interpretación de resultados y la evaluación del proceso seguido, reforzando el pensamiento analítico en la resolución de problemas de cálculo integral.

Objetivos Específicos

1. Emplear sustitución trigonométrica en integrales con radicales, relacionando la estructura del integrando con triángulos rectángulos para transformar expresiones algebraicas complejas en formas trigonométricas manejables, y verificando la coherencia de los límites de integración o constantes resultantes.
2. Descomponer funciones racionales en fracciones parciales, factorizando denominadores y determinando los coeficientes de cada término parcial, con el fin de resolver integrales que involucran cocientes de polinomios y evaluar la viabilidad del método según la factorización del denominador.
3. Desarrollar un enfoque sistemático en la resolución de integrales, integrando las etapas de reconocimiento, resolución e interpretación, y contrastando los resultados obtenidos con diferentes técnicas para fortalecer el pensamiento crítico y la toma de decisiones metodológicas.

**Tabla de Contenidos**

Contenido

[Metodología 5](#_Toc191747449)

[**Etapas de resolución de integrales** 5](#_Toc191747450)

[Reconocimiento y planteamiento 5](#_Toc191747451)

[Resolución técnica 6](#_Toc191747452)

[Interpretación de resultados 6](#_Toc191747453)

[**Criterios para seleccionar técnicas de integración** 7](#_Toc191747454)

[**Tabla 1** 7](#_Toc191747455)

[Regla de oro: 7](#_Toc191747456)

[Desarrollo de la Actividad 8](#_Toc191747457)

[**Integración por Partes** 8](#_Toc191747458)

[Reconocimiento y planteamiento 8](#_Toc191747459)

[Resolución técnica 8](#_Toc191747460)

[**Técnicas Trigonométricas** 9](#_Toc191747461)

[**Sustitución Trigonométrica** 9](#_Toc191747462)

[**Fracciones Parciales** 10](#_Toc191747463)

[Comparación de técnicas aplicadas 10](#_Toc191747464)

[**Tabla 2** 10](#_Toc191747465)

[**Dificultades encontradas y estrategias de solución** 11](#_Toc191747466)

[Dificultades recurrentes: 11](#_Toc191747467)

[Errores comunes y prevención: 11](#_Toc191747468)

[**Coherencia entre resultados y métodos seleccionados** 12](#_Toc191747469)

[Verificación matemática: 12](#_Toc191747470)

[Coherencia metodológica: 12](#_Toc191747471)

[Conclusión del análisis: 12](#_Toc191747472)

[Conclusiones 14](#_Toc191747473)

[Lista de referencias 16](#_Toc191747474)

# Metodología

La resolución de integrales mediante técnicas específicas no es un proceso aleatorio, sino un enfoque estructurado que combina análisis, aplicación de reglas matemáticas y validación de resultados. A continuación, se describen las etapas y criterios metodológicos empleados en este taller:

## **Etapas de resolución de integrales**

### Reconocimiento y planteamiento

En esta fase inicial, se analiza la estructura del integrando para identificar patrones o características que sugieran una técnica específica. Por ejemplo:

* Funciones compuestas: Presencia de productos de polinomios con funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales (clave para integración por partes).
* Potencias trigonométricas: Expresiones como, que pueden requerir identidades trigonométricas.
* Raíces cuadradas: Términos como ​, , que activan la sustitución trigonométrica.
* Funciones racionales: Cocientes de polinomios, donde la factorización del denominador sugiere fracciones parciales.

Ejemplo práctico:  
En el ejercicio 6 ( ), se reconoce la forma ​, lo que lleva a plantear una sustitución trigonométrica.

### Resolución técnica

Una vez identificado el método, se aplican las reglas matemáticas correspondientes:

* Integración por partes: Se eligen *u* y *du* siguiendo criterios como *LIATE* (Logarítmicas, Inversas trigonométricas, Algebraicas, Trigonométricas, Exponenciales).
* Técnicas trigonométricas: Uso de identidades como para reducir potencias.
* Sustitución trigonométrica: Reemplazo de variables basado en triángulos rectángulos y ajuste de diferenciales.
* Fracciones parciales: Descomposición en fracciones simples después de factorizar el denominador.

Ejemplo práctico:  
En el ejercicio 3 (), se aplica integración por partes dos veces, seleccionando  (función algebraica) y  (función exponencial).

### Interpretación de resultados

La etapa final implica validar la respuesta y contextualizarla:

* Verificación: Derivar el resultado para comprobar que coincide con el integrando Original.
* Simplificación: Expresar la solución en términos algebraicos o trigonométricos coherentes.
* Contextualización: Relacionar el resultado con aplicaciones prácticas.

Ejemplo práctico:  
En el ejercicio 7 ( ), tras resolver mediante sustitución , se interpreta el resultado como una función compuesta que podría modelar.

## **Criterios para seleccionar técnicas de integración**

La elección del método depende de:

## **Tabla 1**

*Criterios de selección*

|  |  |
| --- | --- |
| **Característica del integrando** | **Técnica sugerida** |
| Producto de funciones (polinomio × exponencial, etc.) | Integración por partes |
| Potencias de senos/cosenos | Identidades trigonométricas |
| , | Sustitución trigonométrica |
| Cociente de polinomios (grado numerador < grado denominador) | Fracciones parciales |

*Nota: Se define el criterio para hacer uso de la técnica de integración*

### Regla de oro:

* Simplificar antes de integrar: A veces, una manipulación algebraica (como completar cuadrados o dividir polinomios) convierte una integral compleja en una más sencilla.
* Experiencia y práctica: La exposición a diversos ejercicios agudiza la intuición para reconocer patrones rápidamente.

# Desarrollo de la Actividad

En esta sección, se resolverán los 10 ejercicios propuestos aplicando las técnicas de integración correspondientes. Cada solución incluirá:

* Reconocimiento del método.
* Resolución técnica detallada.
* Interpretación o verificación del resultado.

## **Integración por Partes**

**Fórmula clave:**

Ejercicio 1:

### Reconocimiento y planteamiento

Método: integración por partes.

Para aplicar esta técnica, elegimos las siguientes funciones según la regla LIATE (Logarítmicas, Inversas trigonométricas, Algebraicas, Trigonométricas, Exponenciales):

* (función algebraica, preferida sobre trigonométricas)
* (el diferencial contiene la función trigonométrica)

### **Resolución técnica**

Derivamos y calculamos la integral de :

* Derivada de :
* Integral de :
* Usamos la regla de integración de coseno:

Ejercicio 2:

Ejercicio 3:

## **Técnicas Trigonométricas**

Formula clave:

Ejercicio 4:

Ejercicio 5:

## **Sustitución Trigonométrica**

Formula clave:

Ejercicio 6:

Ejercicio 7:

Ejercicio 8:

## **Fracciones Parciales**

Formula clave:

Ejercicio 9:

Ejercicio 10:

# Comparación de técnicas aplicadas

A lo largo del taller, se emplearon cuatro técnicas principales, cada una con un ámbito de aplicación específico

### **Tabla 2**

*Técnicas aplicadas*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Técnica** | **Ejercicios aplicados** | **Característica común** |
| Integración por partes | 1, 2, 3 | Producto de funciones (polinomio × trigonométrica, polinomio × logarítmica). |
| Técnicas trigonométricas | 4, 5 | Potencias impares de seno/tangente, uso de identidades para simplificar el integrando. |
| **Sustitución trigonométrica** | 6, 7, 8 | Presencia de radicales (a2−x2*a*2−*x*2​, x2−a2*x*2−*a*2​) en el integrando. |
| Fracciones parciales | 9, 10 | Funciones racionales con denominadores factorizables o división polinómica necesaria. |

*Nota: Se define la técnica de integración usada por cada ejercicio*

## **Dificultades encontradas y estrategias de solución**

### Dificultades recurrentes:

* Ejercicio 9 (​ ): Factorizar el denominador  requirió reconocerlo como un cuadrático en , lo que no fue inmediato.
  + *Estrategia*: Hacer  para reescribir el denominador como , factorizando en *(y – 4)( y + 2)*.
* Ejercicio 10 ( ): El grado del numerador era mayor que el del denominador, lo que obligó a realizar una división polinómica antes de aplicar fracciones parciales.
  + *Estrategia*: Dividir  entre , obteniendo
* Ejercicio 7 ( ​): La sustitución directa generó integrales con términos algebraicos difíciles de simplificar.
  + *Estrategia*: Usar  para reducir la integral a una forma manejable, combinada con ajustes algebraicos en los coeficientes.

### Errores comunes y prevención:

* Elección incorrecta de *u* y : En integración por partes, seleccionar  (ejercicio 2) habría complicado la integral.
  + *Solución*: Seguir el criterio *LIATE* para priorizar funciones logarítmicas como *u*.
* Simplificación prematura: En el ejercicio 8 (​), cancelar términos antes de completar la sustitución llevó a errores en pruebas iniciales.
  + *Solución*: Respetar los pasos metodológicos: sustituir primero, simplificar después.

## **Coherencia entre resultados y métodos seleccionados**

La validación de los resultados se realizó mediante dos enfoques:

### Verificación matemática:

* Derivación del resultado: Por ejemplo, al derivar la solución del ejercicio 1 (), se recuperó el integrando original .
* Coherencia dimensional: En sustitución trigonométrica ejercicio 6 (), la expresión final  ​​ mantuvo unidades consistentes con el contexto geométrico del problema.

### Coherencia metodológica:

* **Ejercicio 5 ()**: La sustitución  fue natural debido a la presencia de en el integrando, lo que simplificó la integral a un polinomio en *u*.
* **Ejercicio 8 ()**: Aunque el radical  ​ sugiere sustitución trigonométrica, se resolvió eficientemente con una sustitución algebraica

, mostrando flexibilidad en la elección de métodos.

## Conclusión del análisis:

Los métodos seleccionados no solo fueron adecuados, sino óptimos para cada tipo de integral. La clave fue el reconocimiento temprano de patrones (como la paridad de potencias o la forma del denominador) y la aplicación rigurosa de pasos algebraicos y trigonométricos. Las dificultades surgieron principalmente en manipulaciones intermedias, pero se resolvieron mediante estrategias sistemáticas, reforzando la importancia del pensamiento crítico en cálculo integral.

# Conclusiones

El desarrollo de este taller permitió consolidar un entendimiento profundo y aplicado de las técnicas de integración, no solo como herramientas matemáticas aisladas, sino como un sistema interconectado de métodos cuyo éxito depende de la capacidad crítica para reconocer patrones, seleccionar estrategias y validar resultados. A continuación, se sintetizan las reflexiones más relevantes:

**Sobre la selección de técnicas**

* La **integración por partes** se confirmó como un método versátil para productos de funciones, pero su eficiencia dependió directamente de la elección inicial de *u* y *du*. Por ejemplo, en ejercicios como , priorizar la función logarítmica como *u* simplificó drásticamente los cálculos.
* Las **técnicas trigonométricas** demostraron que las identidades pitagóricas son aliadas indispensables para reducir potencias impares, como en , transformando integrales complejas en polinomios simples.
* La **sustitución trigonométrica** reveló su potencia en integrales con radicales, aunque requirió un cuidado especial al revertir las variables para mantener la coherencia algebraica y geométrica (ej: relación entre *θ* y *x* en ​).
* Las **fracciones parciales** destacaron por su utilidad en funciones racionales, pero su aplicación exigió dominio en factorización y división polinómica, como se vio en el ejercicio 10, donde fue necesario ajustar el grado del numerador antes de descomponer.

**2. Sobre el proceso de resolución**

* Las **tres etapas metodológicas** (reconocimiento, resolución técnica e interpretación) probaron ser un marco sólido para abordar integrales. Por ejemplo, en el ejercicio 7 (∫x3x2−25 dx∫*x*3*x*2−25​*dx*), el reconocimiento temprano de la sustitución u=x2−25*u*=*x*2−25 evitó cálculos redundantes.
* La **verificación de resultados**, mediante derivación o sustitución inversa, emergió como un paso crítico para detectar errores y garantizar la validez de las soluciones.

**3. Sobre las dificultades y aprendizajes**

* **Factorización y manipulación algebraica** (ej: x4−2x2−8*x*4−2*x*2−8 en el ejercicio 9) fueron desafíos recurrentes, pero también oportunidades para fortalecer habilidades de pensamiento lateral, como reescribir expresiones en términos de variables auxiliares (y=x2*y*=*x*2).
* La **flexibilidad metodológica** se reveló clave. En el ejercicio 8 (∫9x31+x2 dx∫1+*x*2​9*x*3​*dx*), una sustitución algebraica simple (u=1+x2*u*=1+*x*2) resultó más eficiente que la sustitución trigonométrica, mostrando que no hay un único camino para resolver integrales.

**4. Aplicaciones y relevancia**

Las técnicas aprendidas no son meros ejercicios teóricos:

* Integrales como ∫xcos⁡(3x) dx∫*x*cos(3*x*)*dx* modelan fenómenos físicos, como el trabajo realizado por fuerzas variables.
* Expresiones con radicales (ej: x2−25*x*2−25​) tienen aplicaciones en geometría e ingeniería, como el cálculo de longitudes en curvas complejas.
* Las funciones racionales (ejercicio 9 y 10) son fundamentales en procesamiento de señales y control automático, donde se descomponen sistemas en componentes más simples.

# Lista de referencias

Python Software Foundation. (s.f.). Data Structures. Recuperado de: <https://docs.python.org/3/tutorial/datastructures.html>

Runestone Academy. (s.f.). Implementación de una pila en Python. Recuperado de: [https://runestone.academy/ns/books/published/pythoned/BasicDS/Implementacion](https://runestone.academy/ns/books/published/pythoned/BasicDS/ImplementacionDeUnaPilaEnPython.html)

[DeUnaPilaEnPython.html](https://runestone.academy/ns/books/published/pythoned/BasicDS/ImplementacionDeUnaPilaEnPython.html)

Runestone Academy. (s.f.). Implementación de una cola en Python. Recuperado de: [https://runestone.academy/ns/books/published/pythoned/BasicDS/Implementacion](https://runestone.academy/ns/books/published/pythoned/BasicDS/ImplementacionDeUnaColaEnPython.html)

[DeUnaColaEnPython.html](https://runestone.academy/ns/books/published/pythoned/BasicDS/ImplementacionDeUnaColaEnPython.html)

GeeksforGeeks. (s.f.). Stack Data Structure. Recuperado de: <https://www.geeksforgeeks.org/stack-data-structure/>

GeeksforGeeks. (s.f.). Queue Data Structure. Recuperado de: <https://www.geeksforgeeks.org/queue-data-structure/>

UC3M OpenCourseWare. (s.f.). Tema 2 Tipos Abstractos de Datos Lineales: 2.1. Pilas y

Colas [PDF]. Recuperado de: <https://ocw.uc3m.es/pluginfile.php/5742/mod_page/content/46/tema2-1.pdf>

Normas APA. (s.f.). Normas APA. Recuperado de: <https://normasapa.in/>

Video explicativo de la Actividad url: <https://youtu.be/8OKKSQkh1aI>